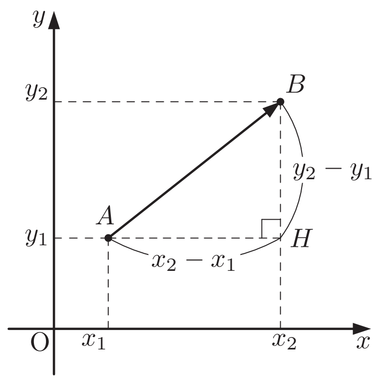
# 1　平面上の 2 点間の距離

近所の中華料理屋。君の姿が見える。どうやら君はこの店でアルバイトをしているようだ。なんと今日が初日だという。仕事内容としては、基本的にはホールの手伝いだが、注文が入れば出前にも出るそうだ。初めてのアルバイトに少々ドキドキしながらも、やる気満々といった様子である。とそのとき電話が鳴った。「はい、中華料理屋でーす！」 君の威勢の良い声が響いた[*1]。どうやら出前の注文のようだ。「はい、はい。チャーハン、ラーメン、餃子５人前ですね。有難うございます！ 」テキパキと注文を取る君。初日とは思えないほどの慣れた口調である。そしてきちんと場所の確認をして、電話を切ろうとしたとき、「どれくらいかかるかなあ？」と客に聞かれた。君はひるんだ。「ええーっと、そうですねえ、少々お待ちください」 地図で場所を確認するが、時間はいまいち見当がつかない。君はまず正確な距離を割り出す為に、下図のような平面座標を書いた。中華料理屋を $A(x_1, y_1)$、出前先を $B(x_2, y_2)$ として、図のように直角三角形 $AHB$ を作り、ピタゴラ




スの定理を適用して、$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$、すなわち

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

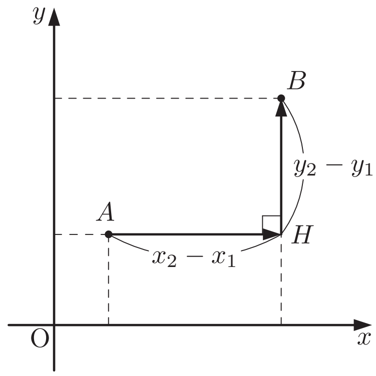
という結果を得た。ここで、地図から割り出した実際の位置 $A(2, 3)$、$B(8, 11)$ を代入し、$AB = \sqrt{(8-2)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{100} = 10\,\text{km}$ として距離を求め、これを出前スクーターの平均速度 $30\,\text{km}/$時 $= 0.5\,\text{km}/$分 で割って、$10/0.5 = 20$ 分 という時間を出した[*2]。君はそれをお客様に伝えようとしたが、そのとき、店の奥に居た店長が大声で怒鳴った。「いい加減なことは言うんじゃないぞ！」

君は考えた。きちんと計算したはずだが、何か間違っているとでも言うのだろうか。そして、あることに気づいた。それは距離の計算である。いま計算した距離は２点を真っ直ぐにつないだときの距離だが、その間には民家もあれば畑もあるだろう、つまり実際にはそのようなルートを進むことはできない。出前スクーターは公道を走らなければならないのである。だから、いま計算した距離はあくまで理想的な最短距離であって、現実的な距離ではない。では、現実的な距離はどのようにして計算すればいいか。それは簡単なことで、要するに道に沿って計算すればいいのである。便利なことに、君の住む街は道路が碁盤目状に張られている。よって、２点間の距離は横の距離と縦の距離の和で計算される。これを**出前距離**と呼ぶことにすると、それは下図に示したような経路に沿って図った長さであり、一般的には以下のような式で計算される。

$$\boxed{AB \text{ 間の出前距離} = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}$$

「そうか！ そうだったのか！ 要するに実際の道のりってことなんだな。よし、そじゃあ、これを使って計算

[*1] 店の名前が「中華料理屋」だったのか！
[*2] 出前に行くには遠すぎないか？ ラーメンが延びてしまうぞ。

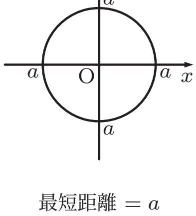



し直しだ！」そうして、君は $A(2,3)$、$B(8,11)$ を出前距離の式に代入し、$|8-2|+|11-3| = 6+8 = 14\,\mathrm{km}$ と求め[*3]、これを出前スクーターの速度 $0.5\,\mathrm{km}/$分 で割って、$14/0.5 = 28$ 分 という時間を出した。「危ないところだったー。もうちょっとでお客様に嘘を言ってしまうところだったよ」 そして君は、このようにして計算した正確な時間をお客様に伝え、電話を切った。すると、それを聞いていた店長が烈火のごとく怒った。「バカヤロー！ 何が 28 分だ！ チャーハン、ラーメン、餃子５人前作るのに何分かかると思ってんだ！」自分の失態に気づき、君は愕然とする。

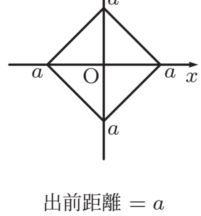
そう、君は出前スクーターで運ぶ時間ばかりに気を取られ、注文された料理を作る時間をすっかり忘れていたのである。はっきり言って、料理を作る方が時間がかかりそうである。君はフロアにひざまずいて泣いているようだが、気を落とすことはないぞ。誰にでも失敗はある。その中でも、この失敗はとっても素晴らしい失敗だ。そこには、ひょっとしたら非常に奥が深い、数学的には高度な内容が隠されているかもしれない[*4]。それはいずれ君自身が気づくだろう。さあ、涙を拭いて元気を出すんだ。青春のアルバイトはまだ始まったばかりじゃないか。

[*3] 当然だが最短距離よりも長い。

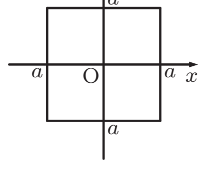
[*4] ここで扱った距離は、それぞれノルム (norm) と呼ばれるもので、最短距離は $L_2$ ノルム、出前距離は $L_1$ ノルムなどといわれるものである。一般的に、$L_p$ ノルムは $\sqrt[p]{(x_2-x_1)^p+(y_2-y_1)^p}$ という形で表される（$p$ は実数)。特に、$p \to \infty$ の場合、$L_\infty = \max(|x_2-x_1|, |y_2-y_1|)$ で定義されるノルムは、縦と横のどちらか大きい方の距離を取るもので、エルインフィニティーノルムと呼ばれるが、これは現実的にどのような距離だということができるだろうか？（いいネーミングが思いついたら教えてください。） ちなみに、ある点から一定の距離 $a$ にある点の集合といえば、半径 $a$ の円だとすぐに分かるが、それは最短距離で考えているからである。出前距離で考えれば、ある点から一定の距離 $a$ にある点の集合は半径 $a$ の円に 45° 傾いて内接する正方形になることがわかる（これが出前範囲だ)。また、$L_\infty$ という距離で考えれば、ある点から一定の距離 $a$ にある点の集合は半径 $a$ の円に外接する正方形となる。下に原点からの「距離」が $a$ であるような点の集合を示しておく。どの「距離」が一番長いか？ それらが同じになるのはどんなときか？ いろいろと考えてみよう。




最短距離 $= a$




出前距離 $= a$




$L_\infty = a$