

1 x^n の導関数 (整数 n)

青春の選手権大会、準々決勝。スコアは 3 - 5。残り時間は 5 分。果たして奇跡の逆転なるか。

三年生の君にとっては、これが最後の大会だ。だが、未だにベンチを温める以外に活躍の場はない。それでも君はチームが勝つことを願って、一生懸命ベンチを温めてきた。

残り時間 5 分を切ったところで、コーチが選手を集めてこう言った。「いいか、もう後がない。一か八かやるしかない。マイナスを放り込め！」その瞬間、選手達に動揺が走る。「そっ、そんなことできないですよ！」「一体どうすれば、そんなことが出来るというんですか！」だがコーチは語気を強めて「うるさい！青春に不可能の文字はない！さあ、行くだ！」そう言って、選手達を無理矢理フィールドに押し戻した。

そのとき、ポカポカのベンチから君が飛び出し、キャプテンを呼んだ。「キャプテン！」「どうした」「ひょっとしたらマイナスを放り込めるかもしれない」「一体どうやって？」「商の微分法を使うんだ。はっきりは分からないけど、でも、出来るような気がするんだ」「はっきりしろよ。もう時間がないんだ！」「わかった。今考えてみる。 x^n について、 n が負の整数のとき、 $n = -m$ とおこう。もちろん m は正の整数だ。これは、商の微分の公式を使って、

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}$$

となる。だが、 $n = -m$ だから、これは結局

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

とかける。ほうら、 n が自然数のときの公式と全く同じじゃないか！しかも、これは $n = 0$ でも成り立つ*1。よって、次のようになる。

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は整数})$$

つまり、これまでの公式にマイナスを放り込んで大丈夫なんだよ。何も新しい方法を考える必要はないんだよ。例えば、

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = (-4)x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{7x^7}\right)' = \frac{1}{7}(x^{-7})' = \frac{-7}{7}x^{-7-1} = -x^{-8}$$

というように、マイナスでもお構いなしにそのまま普通にやればいいんだよ！*2」

「なるほど！ありがとう！」そう言って、キャプテンは駆け足でフィールドに戻り、すぐに選手達にそのことを伝えた。すると選手達の顔色が一変し、選手達に闘志がみなぎった。と次の瞬間、カキーン！試合終了 10 秒前。奇跡の逆転ゴールが決まった。一瞬にして天国と地獄が入れ替わり、スタンドは蜂の巣を突ついたような大騒ぎ。君はポカポカのベンチから飛び出し、レギュラー選手たちと抱き合って喜んでいる。コー

*1 $n = 0$ のときは $(1)' = 0$ なので、公式はそのまま成り立つ。

*2 つまり、肩の数字を前に下ろし、肩の数字を一つ減らす。

チはポカポカのベンチに一人残ってガッツポーズ。さあ、これで高校時代の最後の試合は準決勝へ持ち越した。果たしてそれが本当の最後の試合となるのか、それとも夢の決勝へ進むのか。その運命は君が握っている。————— つづく