

1 整数の指数法則

女子高が男子生徒も受け入れるようになったら、一体どんなことが起こり得るだろうか？これは一見単純なように見えるが、実はかなり複雑な問題である。女子高なので男子生徒もセーラー服を着ることになるが、そんな男子高校生はもはや男子ではない。だが、女子かという身体的特徴は変わらないのだから、男子であるとも言える。一体、我々はそのような生徒のことを何と呼べばいいのだろうか？さらに、ポニーテールや三つ編みの男子生徒、スカートを振り乱して元気に走り回る男子生徒、バレンタインデーに手作りのチョコレートを憧れの新任男性教師に恥ずかしそうに渡す男子生徒、などなど¹。今まで思いもしなかった事態が次々と起こってくるであろう。それは女子高の話に限ったことではない。一般に、扱対象を拡げれば必ずといっていいほど理解に苦しむ状況が起きてくる。ここでは、数学の例を一つ挙げてみよう。理解不能な事態をどのように理解するのか、そこのところをしっかりと見ていって頂きたい。

諸君は指数法則というものを知っているだろう。指数法則とは、 $a > 0$ 、 $b > 0$ に対して、 m と n を正の整数として、下の3つの式で表される²。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (2)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (3)$$

注目すべきは、今のところこの法則は m と n が正の整数の場合だけしか使えないということである。ここで、我々はこの法則を正の整数だけでなく負の整数でもゼロでも、即ち m と n が整数の場合でも使えるようにすることを考えよう³。すると早速、我々は以下のような数が何を表すのか理解に苦しむことになる。

$$3^0 \text{ や } 5^{-3} \quad (4)$$

ゼロ乗やマイナス3乗などは、一体どのような数字なのか⁴。この疑問を解決しなければ、指数法則を整数に拡張することはできない。だが、これらの疑問は意外にあっさりと解決される。指数法則(17)が、 $m = 0$ でも成り立って欲しいと願いながら、実際に $m = 0$ を代入してみると、

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} \quad (5)$$

$$\longrightarrow a^0 \times a^n = a^n \quad (6)$$

となる。これが成立するためには、 a^0 は何でなければならないか？答えは単純。

$$a^0 = 1 \quad (7)$$

でなければならない。だから、ゼロ乗は1と決めてしまうのである。指数法則を拡張するために、我々が勝手に決めるのである⁵。よって、どんな数字でもゼロ乗すれば1となるということで、疑問の一つは解決である。

¹実に気持ち悪い光景だ。

²青春の高校数学 VOL.1 参照

³まさに女子高が男子生徒も受け入れた瞬間である。

⁴女子高の例で言えば、ポニーテールや三つ編みの男子生徒が一体何者なのかという疑問に相当する。

⁵勝手とはいえ、これ以外の決め方は有り得ない。非常にラッキーなことだ。

ではマイナスの指数はどのようにするか。これも上と同様に、指数法則が負の整数でも成り立つように決めればいい。指数法則 (17) が、 $m = -n$ でも成り立って欲しいと祈りながら、実際に $m = -n$ を代入してみると、

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} \quad (8)$$

$$\longrightarrow a^{-n} \times a^n = a^0 \quad (9)$$

$$\longrightarrow a^{-n} \times a^n = 1 \quad (10)$$

$$(11)$$

となる。これが成立するためには、 a^{-n} は何でなければならないか？ 掛けて 1 になるのだから、

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (12)$$

でなければならない。すなわち、指数法則を拡張するためには、マイナス乗 = 逆数としなければならないのである。これにより、例えば、以下のようなことを堂々と書けるようになる。

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \quad (13)$$

そして、これらは日常会話でも自由に使うことができる。例えば、「アメリカのハンバーガーって大きいね。私、これの 2^{-1} くらいいいな」とか、「今は確か平成 $\left(\frac{1}{17}\right)^{-1}$ 年だよな？」など、自由自在である。さらに、余りに大きい数、例えば 343000 などは指数を用いて、

$$343000 = 3.43 \times 10^5 \quad (14)$$

などと書くことがあるが⁶、マイナス乗を導入したことから、我々は非常に小さい数も同様に表すことができる。例えば、

$$0.00132 = 1.32 \times 10^{-3} \quad (15)$$

最後に、拡張された指数法則をまとめて記しておこう。 $a \neq 0$ 、 $b \neq 0$ に対して、 m と n が整数のとき、以下のことが成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (16)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (17)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (18)$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (19)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (20)$$

ゼロ乗やマイナス乗を導入したことによって、最後の 2 式が加えられたところに注意しよう。これらはある意味当たり前の式なのであるが、正の整数だけのときには扱うのが不可能であったのである。

⁶この表示方式は浮動小数点形式と呼ばれる。非常に重要で便利な表示形式である。

以上のように、指数法則を整数に拡張する際の数々の疑問は解決された。それは、指数法則を整数でも使えるようにする為にはそれ以外にどうしようもなかったという、まさに苦渋の選択であったと言えるかもしれない。確かにゼロ乗は1としなければならないのだが、ゼロ乗とは一体何なのか。その哲学的疑問は未だに残ったままである⁷。だが、拡張を推し進めるためには、そのような細かいところは取り敢えず置いておくというフレキシブルな態度も必要なのである。そういう意味では、女子高が男子生徒にまで拡張されることによって生じてくるセーラー服姿の男子生徒は、取り敢えずオカマと呼ばばいい。又は、ポニーテールや三つ編みの男子生徒と合わせて、単純に変態と呼んでもよかろう。また、スカートを振り乱して元気に走り回る男子生徒達はアホと定義してしまえばいい。とにかく頑張って拡張を推し進めるのである。細かいことは後でじっくりと考えればいい。それが青春というものである。さあ、今からでも遅くはない、君も多くの疑問を解決しながら青春の拡張を推し進めよう！

⁷ a^2 は a を 2 つ掛けたもの。 a^1 は a を 1 つ掛けたもの(?)。 a^0 は a を 0 回掛けたもの(???)。意味がさっぱり分からない。