1　定積分と不等式

数学の授業。先生が淡々と説明する。「区分求積法で考えれば、これは当たり前だよな。

> 区間 $[a,b]$ で、常に $f(x)=0$ の場合を除き、
> $$f(x) \geqq 0 \quad ならば \quad \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

その範囲で $f(x)$ がときどきゼロになったとしても、ずっとゼロでなければ、その積分はその下の面積、すなわち正の値となるだろ。で、ここで、$f(x)$ を $h(x)-g(x)$ と置き換えてみるとだな。このような関係式が出るんだな。

> 区間 $[a,b]$ で、常に $h(x)=g(x)$ の場合を除き、
> $$h(x) \geqq g(x) \quad ならば \quad \int_a^b h(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$$

これもまあ、当たり前といえば当たり前だけどな。$f(x)$ の方が大きいんだから、その下の面積も大きいよな。はい、じゃあ、問題でもやってみるか」実に退屈だった。ひょっとしたら、先生もそうだったのかもしれない。ここは軽く流せばいいというような雰囲気が教室に漂っていた。君は「こんなもの、何の役に立つっていうんだ。知らねーよ、ほんと」と、完全にモチベーションを失っている。皆がしょうがなく問題に取り組んでいる中、君はバカバカしくて問題をやる気にもならず、ウトウトと夢の世界へ旅立っていった。

繁華街を歩いている君。それは雪の降るクリスマスイブの夜だった。ふと見ると、歩道の脇に少女が座り込んでいる。泣いているようだ。君は「どうしたの？ 大丈夫？」と声をかける。少女は泣きながら「分からない。分からないの」という。「何が分からないんだい？」「これが分からないの」少女が差し出した紙に一つの不等式が書かれていた。

$$\frac{1}{5} < \log\frac{5}{4} < \frac{1}{4}$$

なるほど、難解な不等式だ。その証明はかなり難しそうだ。と、そこへ黒いリムジンが急停車し、中から男達がゾロゾロと出てきた。「こんなところにいたのか。で、証明はできたのか？」一人の男がそういうと、少女は「いえ、まだできません。でもこの人が」と、泣きながら君に訴えかけた。「お前が証明するというのか？」一斉に注目を浴びる君。だが、証明などできそうにもない。君は「いや、分からないっすよ！ 知らないっすよ！」と、激しく首を横に振った。すると、男達は即座に少女を黒いリムジンに連れ込んで走り去ってしまった。あっという間の出来事に呆然とする君。そこへ彫りの深い男が駆けつける。「しまった。一歩遅かったか。おい、お前、なぜ証明してやらなかったんだ！」「えっ？ いや、だって分からないんだよ」「何を言ってる。簡単だろ。x を区間 $[4,5]$ 内の値だとすれば、$4 \leqq x \leqq 5$ だから、

$$\frac{1}{5} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{4}$$

これら関数の大小は積分しても変わらないから、区間 $[4, 5]$ で積分すれば

$$\int_4^5 \frac{1}{5}\,dx < \int_4^5 \frac{1}{x}\,dx < \int_4^5 \frac{1}{4}\,dx$$

$$\left[\frac{1}{5}x\right]_4^5 < \left[\log x\right]_4^5 < \left[\frac{1}{4}x\right]_4^5$$

$$\frac{1}{5} < \log 5 - \log 4 < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} < \log \frac{5}{4} < \frac{1}{4}$$

これで終りだ。お前、このことを今学んだばかりだろ！ なぜ分からないのだ！」はっとする君。もう少し真面目に授業を受けていたら、あの少女を助けることができたのに。君は唇をかんで悔しがる。

ふと顔を上げると、場面が変わって、君は雑居ビルの屋上にいた。君は、まるで良く知った場所かのように、一つの部屋に真っ直ぐと向かっていく。そしてドアを蹴破った。すると、そこにはさっきの男達とあの少女がいた。「助けて！ お願い！」泣いて助けを求める少女。「あれを証明してください！ お願いです！」見ると壁に不等式が書かれている。

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$$

今度こそとは思うが、全く手も足も出ない君。しばらくすると、男達の一人が「まったく役に立たない男だ」とつぶやいた。と同時に、男達は少女を抱きかかえ、窓ガラスを破って外へ飛び出した。そこへ彫りの深い男が駆けつける。「しまった！ 遅かった。おい、お前！ なぜ証明してやらないんだ！」「だって、ほんとに分からないんだよ！」「バカを言え。x が区間 $[0, 1]$ 内の値ならば、$1 \leqq 1 + x^3 \leqq 1 + x^2$ だろ。ってことは、それらの逆数は大小関係がひっくり返って

$$\frac{1}{1+x^2} \leqq \frac{1}{1+x^3} \leqq 1$$

ということになる。これらの関数の大小は積分しても変わらないから、

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx < \int_0^1 dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} < 1$$

ここで、$x = \tan\theta$ とでもおけば、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ と計算できる[*1]。だから、

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} < 1$$

これで済む話だろ。とにかく、関数の大小は積分しても変わらないということだ！」申し訳なさそうにうつむく君。「ついに奴らは空を飛んだ。今度こそもうダメかもしれんぞ ...」そう言って、残念そうに彫りの深い男は立ち去った。君は「そうか、役に立たないのは俺なんだ ...」と小さくつぶやき、そして叫んだ。「チキショー！」

「うるさーい！ 今は問題をやる時間だ。何をやってるんだ、お前は！」先生に怒られて、目を覚ます君。「あ、夢だったのか。いや、でも、ちゃんと勉強しておこう」夢とは知りながらも、少女を助けられなかった無

[*1] 非常に簡単な置換積分なので、軽く確かめておこう。

念さは心にしっかりと残っている。君は真面目に不等式の証明に取り組んだ。そう、いつか見るかもしれない夢の続きの為に。今度こそ少女を助けなければ。「次はこれだな。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ログってことは、$\frac{1}{x}$ っぽい問題だな。ならば、こうだ。$k \leqq x \leqq k+1$ のとき、

$$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}$$

これを積分すれば、

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx = \frac{1}{k}$$

これを $k=1$ から $k=n$ まで足せば、

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\Big[\log|x|\Big]_0^{n+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

よし、できたぞ！」うん、なかなかいい調子だ。それでいい。モチベーションが高まるならば、理由なんて何でもいい。夢で出会った少女を助けるために定積分と不等式を勉強するだなんて、とってもメルヘンチックじゃないか。そんな素敵な発想は紛れも無く青春だ。さあ、もっともっと演習をこなそう。定積分と不等式の達人になろう。そして、いつかこの夢の続きを見ようじゃないか。