1 ケーリー・ハミルトンの定理

ケーリー・ハミルトンの定理は青春である。それは、やることをやらずにやってしまう青春である。試験を受けずして試験で満点を取ったり、何も食べずに満腹になったり、彼女と出掛けることなく彼女とデートしたり。また、涙を流さずに号泣したり、怒らずに怒鳴ったり、笑わずに大笑いしたり。さらには、自転車に乗らずにサイクリングをしたり、契約もしていないのにマンションに住んだりもする。果たして本当にそんなことが可能なのだろうか。可能である。ケーリー・ハミルトンの定理は、それを我々に教えてくれる。

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、以下のことが成り立つ。

$$\boxed{A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0}$$

これは、**ケーリー・ハミルトンの定理**と呼ばれる驚くべき定理である[*1]。証明は至って簡単である。

$$\begin{aligned}
A^2 - (a+d)A &= A(A - (a+d)E) \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+bc \end{pmatrix} \\
&= -(ad - bc)E
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = 0$$

という具合だ。

さて、この定理の何に驚くのか。それは、この式を次のように書いてみればわかる。

$$A^2 = (a+d)A - (ad - bc)E$$

これは、A^2 を行列の掛け算を行なわずに計算する方法を示しているのである（右辺に行列の掛け算はない！）。掛け算を掛け算せずして計算する。これは驚くべきことである。例えば、$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の二乗は、

$$A^2 = (1+4)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - (1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

[*1] 発見者の名前を逆順にして、ハミルトン・ケーリーの定理と呼ばれることもある。事実としては、アイルランド人数学者のハミルトンはこの定理の特別な場合を証明し、イギリス人数学者のケーリーが一般的に証明をしたようである。どちらの名を先に書くか、それにはいろんな解釈があるようだが（アルファベット順？生誕順？）、普通は貢献度の大きい順に並べるものである。ここではとりあえず、最もよく使われている順序で書くことにする。ちなみに、ケーリー・ハミルトンの定理は n 次の正方行列について成立する。それはどんな式か？ 残念ながら、今の時点では、それが n 次式 になるということしか言えない。詳しくは、大学レベルの線形代数学で学んでくれ。

というように、わずらわしい行列の積など使わずに、いとも簡単に計算できてしまうのである。これは素晴らしいことである。

ならば、A^3 はどうだろうか。A^3 は AA^2 と書けるので、ケーリー・ハミルトンの定理を使って、

$$A^3 = AA^2 = A\left\{(a+d)A - (ad-bc)E\right\} = (a+d)A^2 - (ad-bc)A$$

と書ける。なんと、A^3 は A^2 で計算できる。3 回の掛け算が 2 回で済むのである。同様に、A^4 は A^2A^2 と書けるので、上の結果を使って

$$A^3 = AA^3 = A\left\{(a+d)A^2 - (ad-bc)A\right\} = (a+d)A^3 - (ad-bc)A^2$$

と書ける。つまり、4 回の掛け算が 3 回で済むことになる。これより言えることは、**ケーリー・ハミルトンの定理は行列の掛け算を一つ減らすのに役立つ**ということである[*2]。参考書によっては、この定理を CH 定理と書いているものがあるが、それはまさに「(C) 掛け算を (H) 減らす」ということなのである[*3]。これもまた驚くべき事実である。

だが、本当に驚くのはここからである。はっきり言おう。実は、A の何乗であろうと、掛け算など一回もする必要はないのである。最後にここで、A^n を掛け算を使わずに計算する方法を教えてあげよう。先の行列、$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し、A^n を計算してみよう。我々は、ケーリー・ハミルトンの定理から、$A^2 - 5A + 6E = 0$ が成り立つことを知っている。これを有効に利用するために、まずは実数で、x^n を $x^2 - 5x + 6$ で割ることを考えてみる。二次式で割るのだから、その余りは一次式である。これを $ax + b$ とし、商を $Q(x)$ とおくと、以下の式が成り立つ。

$$x^n = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

ここで、$x = 2$、$x = 3$ を代入して[*4]、

$$\begin{aligned} 2^n &= 2a + b \\ 3^n &= 3a + b \end{aligned}$$

これを解いて a と b を求めると、$a = 3^n - 2^n$、$b = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ となる。ゆえに、

$$x^n = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + (3^n - 2^n)x + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)$$

さて、この式において、x の代わりに A とおくと、

$$A^n = (A^2 - 5A + 6)Q(A) + (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)E$$

が成り立つ[*5]。だが、ケーリー・ハミルトンの定理から、右辺の第一項は消える。

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)E$$

[*2] もちろん、まず A^2 を計算して、その後は、$A^3 = A^2A$、$A^4 = A^3A$ と順々に計算していくのも賢明であろう。

[*3] これは嘘だ。Cayley-Hamilton の頭文字である。

[*4] この等式は恒等式だ。だから、いかなる x についても成立するはずだ。そう、数値代入法によって a と b を求めようというわけだ。

[*5] 右辺には A の掛け算しか存在しない。A は A 自身と交換可能なので、$Q(A)$ がどんな関数であろうと成り立つはずである。

「おおー！ 右辺から掛け算が一瞬にして消え去ったじゃないか！ A^n もまた、掛け算をせずに計算できるというのか！」その通りである。これはこのまま計算すれば、

$$A^n = (3^n - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \\ 2^n - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

ということになる。これはもう奇跡である。これこそが、ケーリー・ハミルトンの定理の真髄である[*6]。

掛け算をせずに A^n を計算する。そんなことが可能なのか。可能である。ケーリー・ハミルトンの定理が不可能を可能にする。我々は今それを目の当たりにした。君はまだ信じられないのかもしれないが、それは厳然たる事実である。掛け算を掛け算せずに計算するというような一見不可能なことが出来たのである。となれば、試験を受けずに満点を取ったり、食べずに満腹になることが不可能だとどうしていえるだろうか。それもきっとできるはずだ。何をためらうことがある。さあ、今すぐやってみるんだ。彼女と出掛けることなく彼女とデートをし、腕を組まずに腕を組み、明るいのに夜景を見に行き、愛していないのに愛していると言って、唇を重ねずにキッスをするのだ。さあ、やってみろ！

[*6] ちなみに、このようなことが出来るのは、行列 A が ケーリー・ハミルトンの定理によって $A^2 - 5A + 6 = O$ を満たすからこそである。一方、実数の場合はケーリー・ハミルトンの定理のようなものがなく、実数 x が $x^2 - 5x + 6 = O$ を満たす保証は無いので、掛け算を避けることはできない。そんなときは、せめて掛け算を減らす努力をしよう。例えば、x^5 は $x^5 = (x^2)^2 \times x$ とすれば 3 回の掛け算で済む。また、x^{10} は $x^{10} = ((x^2)^2 \times x)^2$ とすれば 4 回の掛け算で済む。同じようにすれば、x^{10000} などは 20 回の掛け算で済んでしまう。さらに、実際、このようなテクニックは数値計算で利用されている。