1 導関数

B 君の机の周りに人だかりが出来ている。何だろうと思って、君は近づいていく。見ると、どうやら B 君は微分係数を計算しているようだ。B 君は非常に真面目な男で、微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

に忠実に、実にしっかりと計算している。今計算しているのは、関数 $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の $x = 1$ での微分係数 $f'(1)$ のようだ。彼は以下のように計算した。

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{(1+h)^2 - 6(1+h) + 5\right\} - \left\{1^2 - 6 \times 1 + 5\right\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h - 4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

「凄いなあ。俺だったら 2 行目のところでくたばっちまうよ」と、君は感心している。すると、ある男子生徒が B 君に「じゃあ $x = -2$ のときの $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の微分係数を求めてくれよ」と言った。B 君は「う、うん」と言って、また計算を始めた。何か様子がおかしいと思いつつも、君は取り敢えず眺めている。B 君は頑張って以下のように微分係数を求めた。

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{(-2+h)^2 - 6(-2+h) + 5\right\} - \left\{(-2)^2 - 6 \times (-2) + 5\right\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 10h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h - 10) \\ &= -10 \end{aligned}$$

するとまた、ある女子生徒が B 君に「じゃあ $x = 7$ のときの $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の微分係数を求めてよ」と言う。B 君は「ええっ？　う、うん」と言って、また計算を始めた。よく見ると、B 君の息が荒くなってきているのがわかる。ようやく君は気づいた。そして言った。「これはイジメじゃないか！」そう、つまり B 君はいろいろな x の値について $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の微分係数を計算させられていたというわけである。その計算は、確かに君が言っていたように 2 行目あたりが疲れそうである。こんなことを何度もやらされれば、肉体的にも精神的にも果ててしまう。青春の時代にそんなことがあってはならない。君は考えた。そして B 君に言った。「a のまま計算してみろよ！　つまり、a に値を何も入れないで $f(x) = x^2 - 6x + 5$ の微分係数を計

算するんだよ」「ええっ？　う、うん」と言って、B 君は $f'(a)$ を計算した。

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{(a+h)^2-6(a+h)+5\right\}-\left\{a^2-6\times a+5\right\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-6h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(h+2a-6) \\ &= 2a-6 \end{aligned}$$

「そうだ。つまり $f'(a)=2a-6$ なんだよ。それに値を入れればいいんだよ。例えば、$f'(1)$ なら

$$f'(1)=2\times 1-6=-4 \tag{2}$$

さらに、$f'(-2)$ なら

$$f'(1)=2\times(-2)-6=-10 \tag{3}$$

ほら！　さっき出したのと同じ値が簡単に出たじゃないか！　これは微分係数の公式みたいなものじゃないか。えっ、ってことは、これって関数じゃないのか？　だって、a を決めれば $f'(a)$ の値が一つに決まるだろ[*1]。そうだ、そうに違いない。となると、a を使うのはもうやめよう。元々 a は定数ってことで使ってたわけだし。代わりに、これは変数だという意味を込めて x で表そう。つまり、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4}$$

と書き直そう。そうだなあ、何だかわからないけど、これを導関数と呼ぼう[*2]。英語だったらデリバティブでいいだろ、よく分かんないけど[*3]。それから、上の式は平均変化率の極限なんだから、分母の h は x の増分で、これを Δx と書いて、さらに分子の $f(x+h)-f(x)$ は y の増分で、これを Δy と書けば、

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5}$$

とも書けるだろう。そういう意味では、$y=f(x)$ の導関数のことを $\frac{dy}{dx}$ と書いてもいいじゃないか。もちろん単純に y' と書いてもいいだろう。要するに、$y=f(x)$ の導関数は、

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{df}{dx} \tag{6}$$

のどれで表してもいいということだ[*4]」周りのクラスメートは君の話についていけないのか、ぽかんとしている。B 君は熱心に聞き入っており、きちんとメモを取っている。そして君は最後に、「$f(x)$ から $f'(x)$ を求め

[*1] 君は鋭い。そう、これは関数である。

[*2] 君は実に鋭い。そう、これは本当に導関数と呼ばれている。また、単に微分と呼ばれることもある。ちなみに、英語ではデリバティブ（derivative）という。

[*3] おっと、まさか君が英語名まで根拠なしに当ててしまうとは思わなかった。もう脱帽である。

[*4] 君は本当に凄い。全くその通りである。ちなみに、dx や dy は Δx や Δy に比べて非常に小さい幅を表していると解釈されることがある。それは凄まじく小さい幅である。例えば、$dy=\frac{dy}{dx}dx$ と書いたとき、$\frac{dy}{dx}$ が定数になるくらいの大きさである。つまり、関数が線に見えるくらいの微小な部分ということである（だから微分なのだ）。そして、その線の傾きがまさに微分係数じゃないか（微小な部分 dx の係数みたいなものだ）。

ることを、x について微分するということにしよう。もちろん、単純に微分するといってもいいだろう。導関数を求めるってのは長すぎるからな[*5] さあ、B 君。とにかく導関数を求めるんだ。そうすれば、$x = 1$ でも -2 でもどこでも、単純に代入するだけで微分係数を計算できる。いちいち定義に沿って、極限値を計算してたら参っちゃうよ。じゃあ、頑張れよ！イジメなんかに負けるなよ！」と言って去って行った。B 君はイジメられ続けるが、前よりは楽そうである[*6]。

イジメを見て見ぬ振りするのは簡単なことである。だが、そんなことではせっかくの青春がフニャフニャになってしまう。ちょっとしたことでもいい、何かしらのアクションを起こすことだ。上での君のアクションは結果的にイジメをなくすことは出来なかったが、B 君の苦痛を軽減することは出来た。それでいいのである。何も言えないならイヤラシイ視線を浴びせればいい、目が合うのが恐いならお尻をプリっとしてみせればいい、それも恐いなら先生や警察に匿名で通報すればいい[*7]。そういったことの積み重ねが大事なのである。さあ、もっともっとアクションを起こしていこう。そして、シャキシャキな青春を丸かじりしよう！

[*5] 君は天才ではなかろうか。教科書を見ればわかるが、本当に「導関数を求めることを微分するという」と書いてある。
[*6] 何の解決にもなってないような気もするが、前よりは楽そうなので取り敢えずはオッケーだ。
[*7] 最初から通報すればいいじゃないか。