1　数学的帰納法

B 君が泣いている。通りがかった君が思わず声をかける。「どうしたんだい？」すると B 君は「みんなが僕のことをハゲっていうんだ。まだこんなに髪の毛があるのに。うぇっ、うぇっ」見ると、確かに髪の毛はあるのだが、フサフサとは程遠い状態だ[*1]。さあ、どうする？ この難局を切り抜ける方法はたった一つ。数学的帰納法しかない。

数学的帰納法とは、**自然数 n に関する命題が全ての自然数 n について成立することを証明する為の方法である**[*2]。例えば以下の式を思い出そう。

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

この式は恐らく正しい[*3]。実際にいくつかの n の値で確認してみると、

- $n=2$ のとき

$$\text{左辺}=1+2=3,\quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+1)=3=\text{左辺}\surd$$

- $n=5$ のとき

$$\text{左辺}=1+2+3+4+5=15,\quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5+1)=15=\text{左辺}\surd$$

- $n=7$ のとき

$$\text{左辺}=1+2+3+4+5+6+7=28,\quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7+1)=28=\text{左辺}\surd$$

となって、いずれの場合も確かに成立する。しかし、「じゃあ、$n=23386532$ のときも成立するのか？　証明してみろ！」と問われたら、それを確認するのも辛いし[*4]、よしんば確認したとしても、その次にまた「よく頑張ったなあ。じゃあ次は $n=87323322100$ のときを証明してもらおう」となって、終わりなき残酷物語が無限に続いていくことが予想される。そんなとき、君は「全ての自然数 n について成立することを証明できる方法があったらなあ」とつぶやくだろう。その方法こそが数学的帰納法なのである。

数学的帰納法は、以下の 2 つのステップから成る。

(I) $n=1$ のときの証明
(II) $n=k$ で成立するならば $n=k+1$ でも成立することの証明

これを理解するには、まず (II) を理解するべきである。**(II) は「もしある n で成立するなら、その次も成立する」ことの証明である。**例えば「$n=15$ で成立するなら、$n=16$ でも成立する」とか「$n=1534$ で成立するなら、$n=1535$ でも成立する」とかいった具合であり、(II) はそれを一般的に表しているのである。よく

[*1] う〜ん、微妙な状況だ。
[*2] ちなみに、帰納法とは特殊な場合から一般の場合を導くという証明法の名称である。演繹法はその反対である。例えるならば、帰納法とは多数の事実からある一般的な法則、あるいは結論を導き出す「刑事的」な方法で、演繹法とは一般的な法則やルールを適用して、個々の結論を導く「裁判官的」な方法だといえよう。
[*3] 一応等差数列のところで証明済みであるが、それは一旦忘れてみよう。
[*4] 左辺の計算が凄まじい。

用いられる例えは、将棋倒し（ドミノ倒し）である。将棋の駒の1つが倒れたらその次の駒も倒れることを保証しているのである。そして (I) の登場である。**(I) で1つの駒が倒れる（$n=1$ で成立する）ことを示すのである。**すると、(II) によってその次が倒れ、そのまた次が倒れというように、順々に全ての駒が倒れることになる。即ち、$n=1$ で成立するなら、(II) によって $n=2$ も、そしてその次の $n=3$ もと順々に全ての自然数で成立することが証明されるというわけである。

それでは試しに、式

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{2}$$

を数学的帰納法で証明してみよう。以下、解説をしながら証明を進めていく。

(I) $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1,\quad \text{右辺}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1=\text{左辺}\surd$$

となり成立する。

(II) $n=k$ で成立すると仮定すると

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \tag{3}$$

これを基にして、我々はこれが $n=k+1$ でも成立するかどうかを示さなければならない。つまり、

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\left((k+1)+1\right) \tag{4}$$

が成立するかどうかを示さなければならない。そう、**ゴールは分かっているのである**[*5]。ではこれをどうやって証明するか。一つの戦略は、(3) の両辺に $(k+1)$ を足すというものである。実際に $(k+1)$ を加えてみると、

$$1+2+3+4+\cdots k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \tag{5}$$

となり、ゴールである式 (4) の左辺が出来上がる。後は、右辺が $\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$ となることを示せばいいというわけである。事実、それは簡単に証明できて、

$$\begin{aligned}1+2+3+4+\cdots k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}\left(k(k+1)+2(k+1)\right)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)\left((k+1)+1\right)\end{aligned}$$

となり、$n=k+1$ でも成立することが示された[*6]。

[*5] これは大事なことである。数学的帰納法では、証明すべきものは最初から分かっているのである。そういう意味では簡単な方法である。

[*6] ここでやったような左辺又は右辺をまず揃えて残りを詰めていくという方法はよく使われる。覚えておこう。

(III) 以上の (I)(II) より、与式は全ての自然数 n について成立する。Q.E.D.[*7]

意外に思うかもしれないが、この数学的帰納法は日常生活の至るところで応用されている。例えばネズミ講やマルチ商法などは、まさに数学的帰納法の原理を利用しようとしている。いずれも、うまい話を出汁にして多くの人を勧誘し、ピラミッド型に組織を拡大増殖するシステムである[*8]。うまい話を作り上げて、１人が入ればその家族や友人も入るようなシステムを作る。これはまさに数学的帰納法のステップ (II) である。後は誰か１人が始めればいいというわけである。また、塾などで兄弟で通えば授業料が割引になるという制度があれば、それも数学的帰納法の (II) だといえよう。さらに、居酒屋やファーストフード店などを利用するとドリンクのクーポン券などをもらうことがある。それも、まさしく数学的帰納法の (II) である[*9]。とにかく、数学的帰納法のステップ (II) は、連鎖を作ろうという試みという意味では、世の中の至るところで見られる。ただ、もちろん数学と違って１００％保証できないというのが現実世界の厳しいところである。うまく行けば、商売も一生安泰（全ての自然数で成立）ということになるのだが。

さて、冒頭の B 君のハゲ頭の話に戻ろう。おっと、失礼。ハゲ頭ではなく薄い頭だ。数学的帰納法を理解した君は自信を持って言う。「B 君、実は人間はみんなハゲなんだよ」「えっ？　そんなバカな」君はニッコリ笑う。「本当さ。これは数学的に証明できるんだ。それはとっても簡単なことさ。つまり、

髪の毛が n 本の人はハゲである。

という命題を数学的帰納法で証明すればいいんだよ。まず、当然だけど、髪の毛が１本しかない人はハゲだよね。だから、この命題は $n=1$ で成り立つ。そして、髪の毛が k 本の人がハゲだとすると、$k+1$ 本の人はどうだい。たった１本増えただけだから、それはやっぱりハゲだよね。これで数学的帰納法のステップ (I) と (II) の両方が示された。ということで、この命題は全ての自然数 n で成り立つことが証明された。つまり、髪の毛が何本あってもそれはハゲなんだよ！ だからみんなハゲなんだよ！」B 君の泣き顔が一瞬にして笑顔に変わる。さらに君は「同じようにすれば、人間はみんな貧乏だということも、人間はみんなバカだということも、人間はみんなツルツルだということも証明できるんだ！ どうだい、凄いだろ！」と盛り上げる。「うん、すごい！ 凄すぎるよ！ 何だか凄く気分がいいよ。うわぁー！」感極まって叫ぶ B 君。数学的帰納法が青春であることが証明された瞬間であった。

[*7] ‘証明終わり’ を意味するラテン語、Quod erat demonstrandum の略。その英訳は what had to be proved や what was to be demonstrated であり、直訳すれば「以上が証明すべきことであった」などとなるだろう。ちなみに、「Q.E.D. は Quite Easily Done の略なんだよ。はっはっは！」などという数学教師がいるらしいが、それはもちろん嘘（ジョーク）である。

[*8] ネズミ講とマルチ商法は厳密には異なるものであるが、ここでは深入りしない。詳しいことは、お母さんに聞いて頂きたい。

[*9] つまり、リピーターを作るということだ。