

1 2次関数の決定

子供が泣いている。通りかかった君は、「ぼうや、どうしたんだい？」と優しく声をかける。すると子供はヒクヒクしながらこう言う。「お、おこづかいを減らされちゃったのー。毎月500円だったのに、先月200円に減らされて、今月はとうとう100円になっちゃったー。わぁ～ん、わぁ～ん！」かわいそうだけれども、この子の親に小遣いを上げるようお願いするわけにもいかず、ましてやこの子にお金を恵んであげるわけにもいかず、君は途方にくれる¹。そこへ、彫りの深い男子高校生が通りがかる。その彫りの深い男子高校生は、事情を聞くと早速紙と鉛筆を取り出し、何やら計算を始めた。その結果を子供に見せて説明すると、なんと子供は泣きやみ、満面の笑顔でスキップして家に帰っていった。君は感動のあまりボロボロと涙を流している。一体何が起こったのだろうか。

さて、話は変わるが、2点を決めると直線が一つ決まる。当たり前である。これは、直線の方程式 $y = ax + b$ が2つの未知数 (a と b) を含んでいるからである。そして、「2点の座標」などのような2つの情報があれば、それで連立方程式を立ててそれを解いて未知数を決定、即ち、直線を決定できるというわけである²。同様に考えると、放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ は、3つの未知数 (a と b と c) を含んでいるので、放物線は3つの情報があれば決定するといえる。それは、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形で考えても、やはり未知数は a と p と q の3つで、同じことである。いくつかの例を見ていこう。

例題1：「点 $(-3, 2)$ を頂点として、さらに点 $(-4, 5)$ を通る放物線の方程式 (2次関数) を求めよ。」 $y = a(x - p)^2 + q$ の形で考えると、

$$\text{頂点の座標が } (-3, 2) \rightarrow p = -3, q = 2 \quad (1)$$

よって、

$$y = a(x + 3)^2 + 2 \quad (2)$$

これに $(-4, 5)$ を代入すれば、以下のように a が決定される。

$$5 = a(-4 + 3)^2 + 2 \rightarrow 5 = a + 2 \rightarrow a = 3 \quad (3)$$

結局、この放物線の式は $y = 3(x + 3)^2 + 2 = 3x^2 + 18x + 29$ となる。

例題2：「軸の方程式が $x = 2$ で、2点 $(1, 3)$ 、 $(5, -5)$ を通る2次関数を決定せよ。」軸の方程式が与えられているので、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形で考えたほうが簡単である。

$$\text{軸の方程式が } x = 2 \rightarrow p = 2 \quad (4)$$

つまり

$$y = a(x - 2)^2 + q \quad (5)$$

ここで、2点の座標を代入して、

$$3 = a(1 - 2)^2 + q \quad (6)$$

$$-5 = a(5 - 2)^2 + q \quad (7)$$

¹恵んでやれよ。

²中学生の頃、諸君はこれを散々やっている。

という a と q に関する連立方程式が得られる。これを解いて、 $a = -1$ と $q = 4$ を得る。ゆえに、求める 2 次関数は $y = -(x-2)^2 + 4 = -x^2 + 4x$ となる。

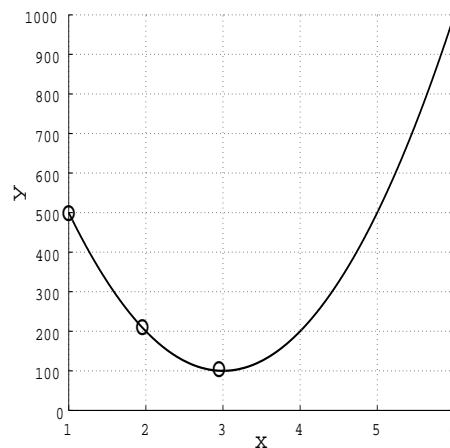
さて、ここで冒頭の話に戻ろう。その彫りの深い男子高校生は何をしたのか。彼は 2 次関数を決定したのである。小遣いが一月目に 500 円ということで $(1, 500)$ 、二月目に 200 円で $(2, 200)$ 、そして三月目に 100 円で $(3, 100)$ 。これらを座標上の点だと考えれば、3 つの情報があるので、これら 3 点を通る 2 次関数を決定することができる。そして、そのグラフを見れば今後お小遣いがどのように変化していくかを予想できると考えたわけである。まず、 $y = ax^2 + bx + c$ として、3 点の座標を順次代入して、

$$500 = a + b + c \quad (8)$$

$$200 = 4a + 2b + c \quad (9)$$

$$100 = 9a + 3b + c \quad (10)$$

という 3 つの式を得る³。これを解いて、 $a = 100$ 、 $b = -600$ 、 $c = 1000$ を得る。よって、求める 2 次関数は $y = 100x^2 - 600x + 1000$ 、そしてそのグラフは下図のようになる。図中の \circ は、通るべき 3 点を表している。これで子供が元気になっ



た理由が分かったであろう。そう、お小遣いは今後飛躍的に上がっていくと考えられるのである。なんと 6 ヶ月目には 1000 円である。しかも、その後もグングン増え続ける。子供は本当に喜んだ。君は感動で涙腺を破壊され、ポロポロと涙を流した。そして、彫りの深い男子高校生は白い歯をキラリとさせ、青春の街へと消えていった。3 つの情報を集めて 2 次関数を作るだけでいい。たったそれだけのことでいい。それだけで、人間はポロポロと涙を流すことができる。ニコニコ顔でスキップできる。「あばよ！」と言い放って、クールにその場を去ることができる。さあ、今すぐ 3 つの情報を探そう。むやみやたらに 2 次関数を作ろう。そして、今日も新たな感動の物語りを作ろう。それは、青春という名の時代に数学を学ぶ諸君の使命である。

³このような、3 文字についての 1 次の連立方程式を連立 3 元一次方程式という。3 文字ある場合は、まずひとつの文字を消去して 2 つの文字の連立方程式にすることから始めればよい。