1　虚数単位 i とは何か

君はカフェの片隅で彼女を待っている。すぐ横でノートを広げて勉強している２人の男子高校生の会話が耳に入ってきた。「アイって、２乗したら -1 になるんだったよな？」「アイ？　ああ、i ね。確かに $i^2 = -1$ だよ。一瞬、ラブのことかと思っちゃったよ。ははははは」「i と愛ね。確かに似てる。っていうか、同じじゃん。はははは」 他愛の無い会話である。だが君は、その会話がどうも気に入らないようだ。「またここにも本質を理解していない奴らがいるじゃないか。i と愛の関係も知らなくて、よくも高校生が務まるものだ。ほんとにどいつもこいつも！　こんな体たらくで、いったい日本はどうなっちまうんだ！」そうつぶやいたと思ったら、君は立ち上がってその２人に向かって語り始めていた。

「おい！　貴様ら！　今から俺が i と愛の関係を教えてやるから、よく聞け。恐らく貴様らは学校で、**２乗すれば -1 になるような新しい数字を考えて、これを i と書き、虚数単位と呼ぶ、すなわち**

$$\boxed{i^2 = -1}$$

である、などと習ったんだろ。そして、この新しい数字を使えば負の数の平方根を表せるということを習っただろ。例えば、$\sqrt{2}\,i$ と $-\sqrt{2}\,i$ は、以下のようにどちらも２乗すれば -2 になるので、

$$(\sqrt{2}\,i)^2 = \sqrt{2}^2\,i^2 = 2\times(-1) = -2$$
$$(-\sqrt{2}\,i)^2 = (-\sqrt{2})^2\,i^2 = 2\times(-1) = -2$$

-2 の平方根だといえる。つまり、一般に $a > 0$ のとき、

$$\boxed{-a \text{ の平方根は、} \pm\sqrt{a}\,i}$$

となるわけだ。ここで、方程式 $x^2 = -a$ を解くことを考えたりするだろう。そうなれば、思わず（何も深く考えず単純に両辺のルートをとって）

$$x^2 = -a \quad\longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{-a}$$

と書きたくなるものだ。そして気づく。$\sqrt{-a}$ という奇妙な数字は $\sqrt{a}\,i$ に他ならないということに。というわけで、

$$\boxed{\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i \text{ とくに、} \sqrt{-1} = i}$$

ということになるわけだ[*1]。まあ、こんなとこだろう。だが、この程度では i の本質を理解するのは到底不可能なのだ。事の本質を理解するには、その起源をよく理解しなければならない。いいか、i **は３次方程式を解く際の必要**から生まれたんだ。詳しいことは省いて、取り敢えず３次方程式の解の公式を教えてやろう。３次

[*1] $\sqrt{-a}$ は、方程式を形式的に解いて、無理矢理に書いただけである。$\sqrt{-a}$ という数字の実態は、よく分からないのである。だが、その方程式から考えれば、$\sqrt{-a}$ が「２乗すれば $-a$ になる数＝ $-a$ の平方根」を表すべきであることは分かる。そこで、すぐ上で導入した $-a$ の平方根、すなわち $\pm\sqrt{a}\,i$ を思い出し、「あっ、なるほど！　$\sqrt{-a}$ は $\sqrt{a}\,i$ のことだ！」と気づくのである。ということで、君は**この先 $\sqrt{-a}$ を見ることがあったら必ず $\sqrt{a}\,i$ と書き直して使うのである。** これは非常に大事なことである。よく分からない $\sqrt{-a}$ という表現のまま計算しないこと。$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = 1$ は大きな間違いであり、$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = i\times i = i^2 = -1$ が正しいのである。

方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の３つの解 x_1、x_2、x_3 は

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \omega_1\sqrt{-q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega_1\sqrt{-q-\sqrt{p^3+q^2}}-\frac{a}{3}\\
x_2 &= \omega_2\sqrt{-q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega_3\sqrt{-q-\sqrt{p^3+q^2}}-\frac{a}{3}\\
x_3 &= \omega_3\sqrt{-q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega_2\sqrt{-q-\sqrt{p^3+q^2}}-\frac{a}{3}
\end{aligned}
$$

となるんだ[*2]。ここで、ω_1、ω_2、ω_3 は

$$\omega_1=1,\quad \omega_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad \omega_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

であり[*3]、p と q は３次方程式の係数 a、b、c から

$$p=\frac{1}{3}\left\{b-\frac{a^2}{3}\right\},\quad q=\frac{1}{2}\left\{c+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}\right\}$$

で計算される。どうだ、すごいだろう。だが細かいことはどうでもいいんだ。大事なのは、この公式には虚数単位 i が入っているということだ。この公式を導いてみれば分かるが、どうしても途中で「２乗して -1 になる数字」を導入する必要が出てくるのだ。そんな数字が存在しない時代には、それは非常に不可思議なことだった。当然、そんな意味不明な数字は使いたくないだろう。この公式の発見者は、何とかして i を使わない公式を導こうとしたそうだ。だが、無理だった[*4]。たとえ解が実数であっても、途中で i を使わなければならないのだ[*5]。全くもって理不尽、理解不能なことだとは思わんか！」　２人の男子高校生は君の迫力に圧倒され、思わず「あっ、はい！」と答えた。

君は軽くうなづき、大きく深呼吸をした。そしていきなり「愛とは何だ？」と２人に疑問を投げかけた。あまりに唐突だったのか、２人は目をパチパチさせながら「わっかりません！」と答える他に術が無かった。ニヤリ笑って、君は話し始めた。「それは誰にも分かるはずがない。実体が無いのだから。これが愛ですと言って人に見せることはできないのだよ。しかし、だからといって愛なんて存在しないとは言えない。人は愛の存在を否定することは出来ないのだ。実際、人間はいろんなところで愛を語る。家族愛や兄弟愛、愛人や愛弟子、「愛のメモリー」[*6] や 「愛はかげろう」[*7]、しまいには「愛は地球を救う」[*8]などと言いだす始末だ。一体何なんだこれは。何なんだこれはー！」　２人はまた目をパチパチさせて「わっかりませーん！」と答える。大きく息を吐き、君は話を続ける。「どうしても必要だということなのだ。愛というものの存在が。複雑な人間社会という方程式の解を見つける為には、認めざるを得ないのだよ。その愛というものの存在を。男女が結婚という解に到達する為には愛の存在が不可欠であるし、見知らぬ人に無条件にお金を与えるような（合理的に考えれば）不可解な行動は愛の存在無しには説明できやしない。もちろん、一旦解が出てしまえば愛が消えてしまうこともあるだろう[*9]。だが、どんな解であれ、そこへ到達する為には避けることができないのだ。そう、それはまさに虚数単位なのだ！ だからこそ、虚数単位を表すのに $i=$ 愛 を使うのだ！[*10] 愛なのだよ、愛！」

[*2] これはカルダノの公式と呼ばれるが、元々は二ッコロ・フォンタナ (Niccolo Fontana: 1499-1557)、通称タルタリア (Tartaglia) が発見し、秘密にしていたものである。誰にも言わないという約束でカルダノ (Gerolamo Cardano:1501-1576) に教えてあげたところ、約束を破って自著で発表してしまったという。悪い子だ。

[*3] これらは x^3-1-0 の解であり、１の３乗根と呼ばれる。

[*4] 今では、３次方程式の解の公式は i を使わなければ公式を表せないことが証明されている。ちなみに、このことから、人々は不思議な数字 i の存在を次第に認めていくようになる。まさに虚数単位の起源というわけである。

[*5] 試しに $x^3-6x^2+11x-6=0$ の答えを計算してみればいい。途中は i があちらこちらで踊り狂って大変だが、答えは $x=1,2,3$ となるはずである。

[*6] 褐色のセクシー歌手・松崎しげるの大ヒット曲（1977 年）。

[*7] 「これも愛 あれも愛 たぶん愛 きっと愛」という優柔不断なフレーズで有名な、女優・松坂慶子のヒット曲（1979 年）。

[*8] 日本テレビのチャリティー番組「２４時間テレビ」のキャッチフレーズ。

[*9] 世の中には、結婚後１年で愛は消えると主張する夫婦もいる。

[*10] 嘘だ。２乗して -1 になる数のことを英語で imaginary number という。その頭文字の i である。

あまりの衝撃に声も出ない２人を前に、君はさらに追い討ちをかけるように続ける。「さっき、愛は目に見えないといったが、だからこそ**愛が見えるように努力することが大事なのだ。**虚数単位の i の場合、必ず i を明確に書き出すこと、すなわち

$$\boxed{\sqrt{-a}\text{ を含む計算は、必ず }\sqrt{a}\,i\text{ と書き換えてから計算すること}}$$

これを忘れぬことだ。例えば、

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-7}=\sqrt{(-3)(-7)}=\sqrt{21}$$

としてしまうと、それは大きな間違いだ。それは

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{-7}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{7}\,i=\sqrt{3}\times\sqrt{7}\,i^2=\sqrt{3\times 7}\times(-1)=-\sqrt{21}$$

としなければならない。すなわち、

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$
$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$

といった根号の性質は、$a, b > 0$ の場合しか成立しないのだ。i を明確に表現してさえいれば普通に計算して良いのだが、それを怠ると一転して間違った解を導いてしまう危険性があるということだ。巷には愛情表現の乏しさが原因でもめるカップルが多いが、彼らは愛の本質を全く理解していないのだ。まったく残念なことだ。

最後にもう１つ、**愛に大小などない**ことを教えてやろう。例えば $i > 0$ だとしてみろ。すると、i は正なので両辺に i を掛けても不等号の向きは変わらないはずだ。

$$\begin{aligned} & i\times i > 0\times i \\ \longrightarrow\quad & -1 > 0 \end{aligned}$$

なんだこの矛盾は！ 要するに、$i > 0$ と仮定したこと自体が間違っていたのだ[*11]。もちろん $i < 0$ としてみても、同様の矛盾にぶつかってしまう。要するに、愛の大小などを語ること自体が間違っているのだ。愛というのは大小という概念を超越したものなのだ！」

そのとき、君の彼女が現れた。彼女の前にひざまずき、手の甲にキッスをする君。用意していた豪華な花束を彼女に渡し、彼女をサッと抱き上げ、「これが愛を表現するということだ。 ようく覚えておけ。 さらばだ！」と言い捨てて、君は彼女を抱いたままカフェを去っていった[*12]。呆然とする２人の男子高校生。青春の夕焼けがゆらゆらと広がる、夕刻の出来事であった。

---

*11 おっ、この証明法は背理法じゃないか！ 懐かしいねえ。

*12 かっこいいー！