# 1　対数（ロガリズム）

ダンディズムはもう古い。これからはロガリズムの時代である。実際、厚生労働省の調査によると全国の女子高生の約 89.5 %が「どちらかといえば、ダンディな男よりもロガリィな男の方が好き」の項目で「強くそう思う」と答えているという[*1]。また欧米においても、映画「クロコダイル・ダンディー」を「クロコダイル・ロガリィ」に改題するなどの活発な動きが目立ってきており[*2]、ロガリズムが時代の趨勢であることは間違いないと言えよう。奇しくも、ロガリズムを最初に研究したというスコットランドの数学者ジョン＝ネイピア（John Napier）は、400 年も前に「ロガリズムはダンディズムを駆逐する」という有名な言葉を残している[*3]。驚くことに、ロガリズム時代の到来を 400 年も前に予言していたというわけである。ここで「えっ、ロガリズムって何？　どうやったらロガリィな男になれるの？　ねえ、ねえ！」と焦っている君は、本当にラッキーである。以下を読み進めていけば、お望みどおりの ” ロガリィな男 ” になれるのだから[*4]。

以下の方程式を満たす $x$ を見つけよう。

$$10^x = 1000 \tag{1}$$

これは、10 を何乗すれば 1000 になるかを問うている。もちろん、10 を 3 乗すれば 1000 になるので答えは $x = 3$ となる。これは簡単である。では、こんな方程式はどうだろうか。

$$10^x = 1250 \tag{2}$$

すなわち、10 を何乗すれば 1250 になるか？　君はここで「そもそもそんな数が存在するのか？」と疑問に思うかもしれないが、それは明らかに存在する。なぜなら、全ての実数 $x$ について指数関数 $y = 10^x$ が定義でき、その値域は正の実数全体であることを我々は前節で学んだからである[*5]。さあ、どうする？　ここでロガリィな男は、落ち着き払って

$$x = \log_{10} 1250 \tag{3}$$

と書き、その数を見つけたことにしてしまうのである[*6]。即ち、10 を何乗すれば 1250 になるかという数を、その実際の値はともかく、log という記号を用いて $\log_{10} 1250$ と表すわけである[*7]。この落ち着きと強引さこそが、ロガリィな男の特徴である。

一般に、$a > 0$、$a \neq 1$ のとき[*8]、任意の正の実数 $M$ に対して

$$a^x = M \tag{4}$$

となる $x$ の値を、

$$\log_a M \tag{5}$$

---

[*1] 嘘だ。
[*2] 嘘だ。
[*3] これも嘘だ。ただし、ジョン＝ネイピアが初めてロガリズムを研究したのは本当である。また、彼がギリシア語の logos(比) と arithmos(計算) を掛け合わせてロガリズム (Logarithm) と名付けたそうだ。
[*4] 焦らずにじっくりと読んでいこう！
[*5] $y = 10^x$ のグラフを見れば、$y = 1250$ となる $x$ が存在することは一目瞭然である。
[*6] ” 平方根な男 ” もこのような強引さを身に付けていたことを思い出そう。
[*7] $\log_{10} 1250$ は「ログ 10 の 1250」と読む。
[*8] $a = 1$ なら、$x$ がどんな値でも $M = 1$ となってしまう。つまり、$\log_a M$ の値は一つに決まらない。

と書き、これを $a$ を底 (base) とする $M$ の対数という[*9]。この対数こそがロガリズム (Logarithm) であり、俗にログ（Log）と呼ばれるものである。簡単に言ってしまえば、

$$\boxed{\log_a M \quad = \quad a \text{ を何乗したら } M \text{ になるか？}} \tag{6}$$

ということである。このように考えれば、例えば以下のような Log の値を簡単に求めることができる。

$$\log_2 8 = \quad 2 \text{ を何乗したら } 8 \text{ になるか？} = 3 \tag{7}$$
$$\log_3 9 = \quad 3 \text{ を何乗したら } 9 \text{ になるか？} = 2 \tag{8}$$
$$\log_a a^7 = \quad a \text{ を何乗したら } a^7 \text{ になるか？} = 7 \tag{9}$$
$$\log_5 \frac{1}{5} = \quad 5 \text{ を何乗したら } \tfrac{1}{5} \text{ になるか？} = -1 \tag{10}$$

また、以下のことも簡単に理解できるであろう[*10]。

$$\boxed{\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1} \tag{11}$$

もちろん、多くの場合 Log の値は複雑すぎて上のように手計算では求められない[*11]。だが、そこでひるんではいけない。涼しい顔をして、Log の形のままおいておけばいい。それがロガリィな男というものである。

それでは、このロガリズムの特徴を調べていこう。取り敢えず $\log_a M = x$、$\log_a N = y$ とおいてみると、定義から $M = a^x$ であり、$N = a^y$ である。ここで、$MN$ を考えてみる。

$$MN = a^x a^y = a^{x+y} \tag{12}$$

よって、

$$\log_a MN = x + y \tag{13}$$

である。ここで、$\log_a M = x$、$\log_a N = y$ であることを思い出せば、

$$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \tag{14}$$

と、”積の対数は対数の和になる”という驚くべき関係式が得られる。さらに、同様にすれば簡単に

$$\boxed{\log_a \tfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \tag{15}$$

という関係式も得られる。これは、”商の対数が対数の差で表される”というこれまた驚くべき関係式である。大きな数の対数は小さな対数の和として扱う。分数の対数は分母分子のそれぞれの対数の差として扱う。対数の世界では、そういったことが可能だというわけである。大きなものや複雑なものは、いくつかの単純なもの

[*9] $M$ をこの対数の真数という。$a(>0)$ を何乗してもマイナスの値にはならないので、真数は絶対に正の数でなければならない。

[*10] ここで、対数は”肩の数字（指数）”を表していることに注目しよう。例えば、$\log_2 32$ は $\log_2 2^5$ なので 5 となるが、その値はまさに 2 の肩の数字である 5 となる。これを逆に考えて、「$2^5$ の対数をとる（つまり $\log_2 2^5$ とする）と 5 になる」などと表現することがある。これは、例えば「$2^5$ という数字に $\log_2$ が擦り寄ったら肩の数字 5 がポロリと落ちた」などとイメージすればいいだろう。当然、ポロリと落ちるべきものがどんな値かわからない時もあるが、そんなときでも対数はやはりそのポロリと落ちるべきものを表しているのである。このイメージがあれば、例えば「71 って 3 を何乗したものかしら？」という無茶な疑問に対して、「それは $\log_3 71$ 乗したものだよ」とクールに答えることができる。なるほど、ロガリィな男がモテるわけである。

[*11] 対数表や電卓で求めることはできる。ちなみに、初めて対数表を作ったのはネイピアである。

に分けて軽く処理する。決して汗をかいて必死に頑張るようなことはしない。その洗練された振る舞いこそは、ロガリィな男の真骨頂である。

もう一つ驚くべき関係式がある。$M^r$ を考えよう。

$$M^r = (a^x)^r = a^{rx} \tag{16}$$

これから

$$\log_a M^r = rx \tag{17}$$

だが、$\log_a M = x$ なので、

$$\boxed{\log_a M^r = r \log_a M} \tag{18}$$

となる。これは、" 真数の肩の数字は前に下ろせる " という驚くべき式である。これは、対数が $M$ の肩の荷を降ろして癒してくれることに他ならない。ロガリズムの行くところ、ポロリポロリと肩の荷が下ろされていくのである[*12]。悩み多き昨今の女子高生達がロガリィな男を強く求めるわけである。

最後に、以下の関係式

$$\boxed{a^{\log_a M} = M} \tag{19}$$

が当たり前の式であることが理解できれば[*13]、君も立派なロガリィ男だ。さあ、おめかしして街へ出かけよう。ロガリズムなビートを刻みながら、君の姿にうっとりとする女子高生達に愛想を振りまこう。気に入った女の子を連れて、映画館へ「クロコダイル・ロガリィ」を見に行こう。そして、鮮やかなバラ色の青春を楽しもうじゃないか！

[*12] これを読むだけでも肩が軽くなった気がしないか？

[*13] $\log_a M$ が「$a$ をそれ乗すれば $M$ になる数」を表しているので $a$ をそれ乗すれば当然 $M$ になるという、ごく当たり前の式である。