

## 1 ドモルガンの法則

”ドモルガン”。非常に力強い響きを持った言葉である。まるでモデルガンのようである。噂によると、ドモルガンとは「私の彼って、ほんとドモルガンー！」などというように、力強い男性のことを表すらしいが、その真相は定かではない<sup>1</sup>。それほどまでに、ドモルガンの法則は力強いのである。そして、もちろん青春には欠かせないアイテムの一つなのである。

これがドモルガンの法則である。

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (2)$$

眠たくなるかもしれないが、敢えて言葉で表せば、

A または B の補集合 = A の補集合 かつ B の補集合

A かつ B の補集合 = A の補集合 または B の補集合

となる。ここで、「なんかようわからんし、ほんまに正しいんかいな？あ～、だっるぅ～」などと言う人が居るかもしれないので、取り合えず(4.8)を証明してみよう。証明は至って簡単である。 $\bar{A}$ と $\bar{B}$ は、それぞれ下の左図と右図のように表せる。

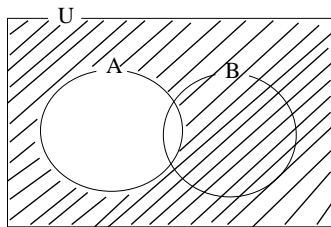


Figure 1:  $\bar{A}$

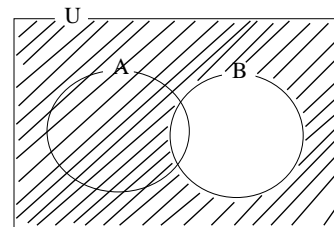
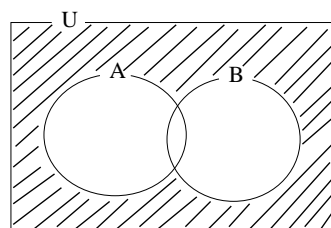


Figure 2:  $\bar{B}$

$\overline{A \cap B}$  は、これらの共通部分(重なる部分)であるから、下図のようにになる。



ここで「これって、まさに $\overline{A \cup B}$ やがな!なるほど、せやから $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ になるわけやな。なあ～んや、簡単やんけ!」と言え、証明終了である<sup>2</sup>。

<sup>1</sup>そんなものは嘘に決まっている。ドモルガンとは、19世紀のイギリスの数学者 Augustus De Morgan の名字である。しかし、そのような使い方をしてもいいだろう。

<sup>2</sup>4.9の証明も同じように簡単にできる。是非とも試して頂きたい。

証明は簡単だが、一体ドモルガンの法則は何の意味があるのか。少し考えてみよう。例えば、相撲取りになる為の条件が「身長 1710cm 以上、かつ体重 750kg 以上」だとしよう<sup>3</sup>。身長 1710cm 以上の人間の集合を  $A$  とし、体重 750kg 以上の人間の集合を  $B$  とすると、相撲取りになれるのは  $A \cap B$  の集合に属する人たちだけといえる。逆に、相撲取りになれないのは  $\overline{A \cap B}$  であり、これはドモルガンの法則により、 $\overline{A \cap B}$  ということになる。つまり、身長 1710cm 未満または体重 750kg 未満の人間ということになる。ここで、"かつ" が "または" に変化したことに気づこう。つまり、

身長 1710cm 以上    かつ    体重 750kg 以上

の補集合（又は否定）は、

身長 1710cm 未満    または    体重 750kg 未満

となり、単に以上を未満に変えただけでなく、"かつ" が "または" に変わっていることがわかる。これは重要なポイントである。深く考えずにヘラヘラしていたら、 $\overline{A \cap B}$  の  $A$  と  $B$  に棒線をつけて  $\overline{A \cap B}$ 、即ち「身長 1710cm 未満 かつ 体重 750kg 未満」としてしまっていたかもしれない。しかし、ドモルガンは「力強く」、「どりゃあー！」と猛獣のような雄叫びを上げながら "かつ" を "または" にひっくり返してくれるのである。これはなんとも心強いことである。ここで、もう一度ドモルガンの法則を眺めて、"かつ" と "または" が入れ替わっていることを確かめ、その偉大さに恐れおののいてみよう。

もう一つ例を挙げよう。脇毛フサフサの人の集合を  $A$  として、おしり丸見えの人の集合を  $B$  とする<sup>4</sup>。すると、脇毛がフサフサまたはおしり丸見えの人間の集合は  $A \cup B$  で表される。それ以外の集団、即ちその補集合は  $\overline{A \cup B}$  である。これは、ドモルガンの一撃により、 $\overline{A \cap B}$  となる。つまり、「脇毛がフサフサでなく、かつおしりも丸見えでない。」ということになる。またもや、ドモルガンは "または" と "かつ" を豪快に取り替えた。お見事である。

証明できるはずだが、結果をひょいと眺めるだけではなぜそうなるのか分かりにくいということが世の中には沢山ある。例えば、車の修理である。壊れた車が修理屋で修理されて元気に走り出す。そのとき、ブレーキも新しいものに交換されていたが、その理由はよくわからなかったりすることもあるだろう。それは正にドモルガンである。つまり、ドモルガン的一撃によって、よくわからないが正しい結果が出たわけである。こんなときには、「なんだかよくわかんないんだけど、車はちゃんと走ってるよ。ほんと、あの修理屋はかなりのドモルガンだね。」などと口走ってみよう。愉快的気分になることうけあいである。また、彼女に誕生日プレゼントを贈ったときに、「なんで人は誕生日にプレゼントを贈るのかしら？」という疑問を彼女に投げかけられたら、君はどうするだろうか。誕生日にプレゼントを贈ることは、誰にとっても当たり前のことであろう。しかし、なぜそんなことをするのはよく分からない。そんなとき、彼女にこうってみよう。「それはね。ドモルガンの仕業なんだよ。」そして、彼女にニッコリと微笑みかける。すると彼女は、「あなたってステキ。あなたは私のドモルガンよ。」と言って、頬を赤らめることであろう。間違いのない。ドモルガンは青春である。

<sup>3</sup>これは無茶苦茶な条件である。これではだれも相撲取りにはなれない。こんなことでは、日本が世界に誇る国技があつという間に廃れてしまう。そんな憤りを感じた人は、相撲協会に抗議をしよう。

<sup>4</sup>このような人間の集団はどこに存在するのだろうか。じっくり考えてみよう。