1　数学的帰納法について

「ようわからんけど、やり方はわかる。$n=1$ のときを示して、$n=k+1$ を証明するとかそんなんちゃうの？」といったところであろうか。「数学的帰納法とは？」と聞かれたときの典型的な返答である。どうやら、やり方はわかるがやっていることをきちんと理解していない高校生が結構多いようである[1]。それは、教科書等の説明がまずいのか、それともどう頑張っても難しいものなのか。本項を読んだ上で、読者に判断を下して頂きたい。

　以下の会話を読んでもらおう。

Ａ君　「お前、こんな公式知ってるか？」

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

Ｂ君　「えっ、あ〜、う〜、おっおぉ〜。。。」

Ａ君　「えっ、知らんのん？　やばいで、それ。高２でこれ知らんかったら、それはかなりやばいで、お前。うっそ〜、まじで〜！おい、頼むから俺に近づかんといてくれ！」

Ｂ君　「なんやね〜ん、それ〜。誰も知らんて言うてへんやんけ!　ほんなもん、お前、それくらい知ってるわい！ほんだらお前、それ証明できんのか？」

Ａ君　「えっ、証明？　そんなもんせんでも、わかるやん、だいたい。例えば $n=3$ の時やったら、左辺が $1+2+3=6$ で右辺が $\frac{1}{2}3(3+1)=6$ であってるやんけ。」

Ｂ君　「えっ、ほんだら $n=9$ のときはどうやねん？」

Ａ君　「そんなもん、$n=9$ もできるに決まってるやんけ。左辺が $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ で右辺が $\frac{1}{2}9(9+1)=45$ で、ほら、あってるやん。」

Ｂ君　「ほんだらー、$n=2,000,000$ のときはどうじゃ？」

Ａ君　「そんなん、じゃまくさいわ。合ってるに決まってるっちゅーねん！」

Ｂ君　「そんな保証あるかい！ひょっとしたらあかんかもしれんやんけ！えっ、お前、これが正しいかどうかも知らんと使ってたんか？うっそ〜、まじで〜。
　あっ、くさっ、うっ、向こうへ行け、くさいから。あかん、くさ過ぎるわ、お前。あっ、鼻取れてもた。」

さぁ、あなたならどうやってこのウルサイＢ君を黙らせるだろうか？[2]　要は、公式 (1) が**全ての自然数 n について成立することを証明**すればいいのである。これが正に数学的帰納法の存在理由たるものである。換言すれば、数学的帰納法は、

[1]根拠はないが、そう仮定しないと話が前へ進まないので、そういうことにしてください。すんません。

[2]「ウルサイ男」呼ばわりするのはちょっと可愛そうかもしれない。最初にかましてきたのはA君である。

自然数 n に関する命題を全ての自然数 n について成立することを証明する為の方法なのである[3]。

数学的帰納法は、以下の 2 つのステップから成る。

(1) $n = 1$ のときの証明

(2) $n = k$ で成立すると仮定をしたときに $n = k + 1$ でも成立することの証明

まずは (1) であるが、これはほとんどの場合簡単に証明できる。ここでは、単に一番小さい自然数である 1 の場合を証明したにすぎないが、これが (2) と合わさると、えらいことが起こるのである。それを理解するには、(2) をきちんと理解する必要がある。ここが若干分かりにくいのかもしれないが、簡単に言えば、(2) では「もし手前で成立するなら、その次も成立する」ことを証明しているのである。例えば「$n = 15$ で成立するなら、$n = 16$ でも成立する」とか「$n = 1,534$ で成立するなら、$n = 1,535$ でも成立する」とかいった具合であり、それらを $n = k$ とすることにより、**一般的**に証明しているのである（**一般的**だから、難しいのである）。よくある例えとしては、ドミノ倒しや将棋倒しなどがあるが、それらで言えばこの (2) は「もし手前の駒が倒れたら、次の駒も必ず倒れる」ことを示しているわけである。しかしながら、この状態だけでは、何も起こらない。単に、「**もし**手前の駒が倒れたら、次の駒も必ず倒れる」だけで、まだ何も起こらない。さて、ここで (1) の登場である。つまり、一つでも倒れることを示してやるのである。そうすると、次も倒れて、それが倒れるならその次も、そしてその次もと、どこまででも倒れていくわけである。即ち、$n = 1$ で成立するなら、その次の $n = 2$ も、そしてその次の $n = 3$ も、と無限に続いていき、全ての自然数で成立することが証明されるわけである。

さて、上でも言ったように、数学的帰納法で難しいのは (2) の「$n = k$ で成立すると仮定をしたときに $n = k + 1$ でも成立することの証明」である。これは、複雑な式の場合は結構困難である。しかしながら、証明すべき式の形は、いかなる場合でも**あらかじめわかっているのである**。それは n の部分を $k + 1$ に置き換えた式である。例えば、最初の例でいうと、$n = k$ のとき

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots k = \frac{1}{2}k(k+1) \tag{2}$$

となると仮定して、この式を基にして、

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1)\} \tag{3}$$

が成立することを示してあげればよい。つまり、**ゴールはわかっているのである**。そして、これを証明する一つの戦略は、式 (2) の両辺に $(k + 1)$ を足すと、ゴールである式 (3) の左辺ができあがることに気づいて、

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \tag{4}$$

とやってみることである。後は、右辺が $\frac{1}{2}(k+1)((k+1)+1)$ となることを証明するだけである。そして、それは単に通分するだけで簡単に証明できる。このよ

[3]ちなみに、帰納法とは、特殊な場合から一般の場合を導くという証明の方法の名称である。

うに、左辺又は右辺をまず揃えて、残りを詰めるという方法がよく使われる。その他の戦略も存在するが、基本はこの**左辺か右辺のどちらかを合わせて、残りを合わせる**という方法であり、これは頭のどこかに保存しておいた方がいい。

数学的帰納法は、日常生活で実際に使う機会がゼロに近いと思っている人が多いと思うが、実はその考え方を応用する機会は豊富に存在する。例えば、ネズミ講などはまさしくこの考え方を応用している。つまり、自分の下に客をつけてそこからリベートを頂く、その客は下にまた別の客をつけてそこからリベートを頂く、これはうまくいけば無限に続き、最終的には世界中の人間がその中に取り込まれ、最初に始めた人間は膨大な金をせしめることができるというものである。しかしながら、ここでは、数学的帰納法のステップ (2) を何らかの方法で確立し（つまり、誰かがやれば必ずその近くの誰かが参加する）、あとは誰か一人が始めればいいわけである。このような商法がうまくいかないのは、(2) を確立するのが難しいからである。また、ある私立の学校では、兄弟姉妹が同じ学校に通うと授業料が割引になるという制度がある。これは、割引を用いて、(2) が成立するように努力しているわけである。しかし当然、(1) が成り立たないと、つまり誰か一人が始めないと何も起こらない。更に、他の応用の仕方として、幸せな人生を送るのにも数学的帰納法は役に立つ。例えば、ハゲで深刻に悩んでいる人が世の中には存在する。そんな友人が居たら、こんなことを話してあげればいい。「なぁ、お前、実は人間は皆ハゲやってこと知ってるか？数学的帰納法で証明できるねんで〜。n を髪の毛の本数やとするやろ。ほんで、(1)$n = 1$ のときは髪の毛 1 本やねんからハゲやんなぁ。ほんで、(2)$n = k$ のときもハゲやと仮定すると、$n = k + 1$ のときは、そんなんハゲに毛を 1 本植えたくらい、やっぱりハゲやんかぁ。ってことで、(1)(2) より、すべての n でハゲってことやん。なっ、だから俺もハゲやし、お前もハゲや。そして世界中の人間は皆ハゲやねん！」そうすると、髪の薄い友人は「あっ、そうなんやぁ〜！みんなハゲなんやぁ〜！なんか俺、感動してるで〜。ほんまやで〜。おおきに！ほんま、おおきにやで〜！」と涙して感動すること間違いなしである。同様にして、「人間はみんな貧乏である」ことも「人間はみんなアホであること」「人間はみんな借金だらけであること」も証明できるのである。そのようにして、自分は不幸だと思っている人間は実は他の人間もみんな不幸であることを実感することによって、非常にすがすがしい気分になれるのである。高校生は、そうやって大人への階段を上がっていくのである。ほな。